Optimization and maximum likelihood estimation

- R 中函數最佳化指令: optimize 指令 (單變數函數) 和 optim 指令(多變數函數).
- optimize 指令語法:

```
optimize(f, c(a,b))                  #求函數f在a,b間的最小值
optimize(f, c(a,b), maximum=TRUE)  #求函數f在a,b間的最大值
```

  Example 1. 假設$f(x) = -x^2 - 1$, $x \in (-\infty, \infty)$. 求f在$[-1, 1]$上的最大值.

```
f <- function(x){ return(-x^2-1) }
opt <- optimize(f, c(-1,1), maximum=TRUE)
opt$maximum      #發生最大值的點
opt$objective    #最大值
```

- optim 指令語法:

```
optim(par, f)      #求函數f的最小值, par 爲最佳化演算法起始值
```

  Example 2. 假設$f(x, y) = x^2 + y^2$, x, $y \in (-\infty, \infty)$. 以$(x, y) = (0.1, 0.1)$爲最佳化演算法起始值, 求f的最小值.

```
f <- function(a){  return( (a[1]^2+a[2]^2) )  }
opt <- optim(c(0.1,0.1), f)
opt$par      #發生最小值的點
opt$value    #最小值
```

- Maximum likelihood estimation (最大概似估計法). 假設資料分布由未知參數θ決定. 最大概似估計法是以概似函數(likelihood function)發生最大值的θ作爲θ之估計值. 若資料是離散型, 則觀察到目前資料的機率, 因和θ有關, 記作$L(\theta)$. 將$L(\theta)$視爲θ的函數即爲概似函數.
- 概似函數$L(\theta)$發生最大值的θ叫做θ的最大概似估計量(Maximum Likelihood Estimator, MLE).
- Example 3. 假設有10筆獨立來自 $Poisson(\mu)$ 的資料, 其中5筆爲0, 4筆爲1, 1筆爲2. 求μ的MLE.

  Likelihood function:

$$\begin{aligned} L(\mu) &= P(Poisson(\mu) = 0)^5 P(Poisson(\mu) = 1)^4 P(Poisson(\mu) = 2) \\ &= e^{-10\mu} \frac{\mu^{0+4+2}}{0!4!2!} \end{aligned}$$

  Let $g(\mu) = \ln L(\mu)$, then $g(\mu) = -10\mu + 6\ln(\mu) - \ln(4!2!)$ and $g'(\mu) = -10 + 6/\mu$. It is clear that $g(\mu)$ is is maximized when $\mu = 0.6$, so $L(\mu)$ is also maximized when $\mu = 0.6$. μ的MLE$= 0.6$.

  R solution:

```
g <- function(mu){
  m <- length(mu)
  ans <- mu
  for (i in 1:m){
  a <- dpois(c(rep(0,5), rep(1,4), 2), mu[i])
  ans[i] <- sum( log(a) )
  }

  return(   ans   )
 }
optimize(g, c(0.0001, 100), maximum=TRUE)$maximum #MLE
```

- Example 4. 假設有12筆獨立來自 $Poisson(\mu)$ 的資料, 其中5筆爲0, 4筆爲1, 3筆爲2以上(含2). 但2以上的資料並沒有記錄確切數值, 只記錄爲2以上. 求μ的MLE.

  Likelihood function:

  $$L(\mu) = P(Poisson(\mu) = 0)^5 P(Poisson(\mu) = 1)^4 P(Poisson(\mu) \geq 2)^3$$

  Let $g(\mu) = \ln L(\mu)$.

```
g <- function(mu){
  m <- length(mu)
  ans <- mu
  for (i in 1:m){
  a<-  sum(log(dpois(c(rep(0,5), rep(1,4)), mu[i])))
  b <- sum(log(1-ppois(rep(1,3), mu[i])))
 ans[i]<- a+b
 }
 return(ans)
}
optimize(g, c(0.0001, 100), maximum=TRUE)$maximum #MLE
```

- Practice Problem 1. 假設 $f(x) = x - \sin(x^2), x \in (-\infty, \infty)$. 求$f$在$[-2, 2]$上的最小值.

- Practice Problem 2.

  (a) 假設有12筆獨立來自$Bin(2, \theta)$的資料. 其中5筆爲0, 5筆爲1, 2筆爲2. 求θ的MLE.

  (b) 假設除了(a)的12筆資料, 又多了兩筆獨立來自$Bin(1, \theta)$的資料, 2筆資料中1筆爲0, 1筆爲1. 基於這14筆資料, 求θ的MLE.